

# Adventní kalendář 2025

2. ročník



**Příklad 23:**

Řešte soustavu exponenciálních rovnic včetně zkoušky řešení

$$x-1 \sqrt{8^{x+4}} = 2^{y+2}$$

$$x+1 \sqrt{9^{x+6}} = 3^{y-2}$$

Řešení. Upravujeme

$$\sqrt[2]{2^{3x+12}} = 2^{y+2},$$

$$\sqrt[3]{3^{2x+12}} = 3^{y-2},$$

Dále platí

$$2^{\frac{3x+12}{2}} = 2^{y+2},$$

$$3^{\frac{2x+12}{3}} = 3^{y-2}.$$

Odtud můžeme napsat rovnost exponentů

$$3x + 12 = (y + 2)(x - 1),$$

$$2x + 12 = (y - 2)(x + 1).$$

Řešíme získanou soustavu dvou kvadratických rovnic o dvou neznámých

$$x - xy + y + 14 = 0, \quad (*)$$

$$4x - xy - y + 14 = 0.$$

Odečtením vyloučíme součin  $xy$

$$3x - 2y = 0,$$

$$x = \frac{2}{3}y.$$

Dosadíme do rovnice (\*):

$$\frac{2}{3}y - \frac{2}{3}y^2 + y + 14 = 0,$$

$$2y^2 - 5y - 42 = 0;$$

$$y_{1,2} = 6, -\frac{7}{2},$$

$$x_{1,2} = 4, -\frac{7}{3}.$$

Protože je zavedena jen odmocnina, jejíž odmocnitel je přirozené číslo (viz čl. 9, Odmocniny), musíme zamítnout dvojici  $(-\frac{7}{3}, -\frac{7}{2})$ . Zkouškou se přesvědčíme, že dvojice  $(4, 6)$  vyhovuje soustavě (zkoušku přenecháváme čtenáři).

**Příklad 22:**

Řešte logaritmickou rovnici

$$2 \log_2 \frac{x-7}{x-1} + \log_2 \frac{x-1}{x+1} = 1$$

$$\log_2 \left( \frac{x-7}{x-1} \right)^2 + \log_2 \frac{x-1}{x+1} = 1$$

$$\log_2 \left[ \left( \frac{x-7}{x-1} \right)^2 \cdot \frac{x-1}{x+1} \right] = 1$$

$$\left[ \left( \frac{x-7}{x-1} \right)^2 \cdot \frac{x-1}{x+1} \right] = 2^1$$

$$\frac{(x-7)^2}{(x-1)^2} \cdot \frac{x-1}{x+1} = 2 \Rightarrow \frac{(x-7)^2}{x^2-1} = 2 \Rightarrow x^2 - 14x + 49 = 2x^2 - 2$$

$$x^2 + 14x - 51 = 0 \Rightarrow x_1 = -17 \quad x_2 = 3$$

**Řešením je  $x = -17$**

**Příklad 21:**

Řešte rovnici

$$\sqrt[3]{23 + 2x} - \sqrt[3]{15 + 2x} = 2$$

Nyní umocníme:

$$23 + 2x - 3 \sqrt[3]{(23 + 2x)^2 (15 + 2x)} + \\ + 3 \sqrt[3]{(23 + 2x) (15 + 2x)^2} - 15 - 2x = 8,$$

$$8 - 3 \sqrt[3]{(23 + 2x) (15 + 2x) (\sqrt[3]{23 + 2x} - \sqrt[3]{15 + 2x})} = 8.$$

Z dané rovnice plyne, že výraz označený svorkou je roven 2, tedy:

$$-6 \sqrt[3]{(23 + 2x) (15 + 2x)} = 0,$$

$$(23 + 2x) (15 + 2x) = 0,$$

$$23 + 2x = 0, 15 + 2x = 0,$$

$$x_1 = -11 \frac{1}{2}, \quad x_2 = -7 \frac{1}{2}.$$

$$\text{Zkouška: I. } L_1 = \sqrt[3]{23 + 2 \left(-11 \frac{1}{2}\right)} - 2 = \\ = \sqrt[3]{23 - 23} - 2 = 0 - 2 = -2.$$

Protože se ve středoškolské matematice odmocňují jenom nezáporná čísla, není pravá strana  $P_1$  pro  $x = -11 \frac{1}{2}$  definována. Proto  $x = -11 \frac{1}{2}$  není kořenem dané rovnice.

$$\text{II. } L_2 = \sqrt[3]{23 + 2 \left(-7 \frac{1}{2}\right)} - 2 = \sqrt[3]{23 - 15} - 2 = \\ = \sqrt[3]{8} - 2 = 2 - 2 = 0,$$

$$P_2 = \sqrt[3]{15 + 2 \left(-7 \frac{1}{2}\right)} = \sqrt[3]{15 - 15} = 0,$$

$$L_2 = P_2.$$

*Shrnutí.* Daná rovnice má jediný kořen  $x = -7 \frac{1}{2}$ .

**Příklad 20:**

Řešte rovnici

$$(0,4)^{\log^2 x + 1} = (6,25)^{2 - \log x^3}$$

Využijeme, že  $6,25 = (0,4)^{-2}$  a upravíme rovnici na tvar:

$$(0,4)^{\log^2 x + 1} = \left[ (0,4)^{-2} \right]^{2 - \log x^3}$$

$$(0,4)^{\log^2 x + 1} = (0,4)^{2 \log x^3 - 4} \Rightarrow \log^2 x + 1 = 2 \log x^3 - 4$$

upravíme

$$\log^2 x + 1 = 6 \log x - 4 \quad \dots \quad \text{položíme } \log x = z$$

$$z^2 - 6z + 5 = 0 \Rightarrow z_1 = 1 \quad z_2 = 5$$

po vrácení k substituci

$$x_1 = 10 \quad x_2 = 10^5$$

**Příklad 19:**

Řešte rovnici

$$\left( \sqrt{\log_x 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}} \right) \cdot \log_{\sqrt{5}} x = -\sqrt{6}$$

Přejdeme k logaritům při základu  $\sqrt{5}$ 

$$\left( \sqrt{\frac{\log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}}{\log_{\sqrt{5}} x} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}} \right) \cdot \log_{\sqrt{5}} x = -\sqrt{6} \quad \dots \quad \left\{ \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5} = \log_{\sqrt{5}} 5 + \log_{\sqrt{5}} \sqrt{5} = 2 + 1 = 3 \right\}$$

položíme  $\log_{\sqrt{5}} x = t$  pak rovnice bude

$$\left( \sqrt{\frac{3}{t} + 3} \right) \cdot t = -\sqrt{6} \quad |^2$$

$$\left( \frac{3}{t} + 3 \right) \cdot t^2 = 6 \Rightarrow 3 \cdot (t + t^2) = 6 \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t_1 = -2 \quad t_2 = 1$$

Vrátíme se k substituci:  $x_1 = \frac{1}{5} \quad x_2 = \sqrt{5}$ **Zkouška:**

$$1) \quad x_1 = \frac{1}{5} \quad \text{L: } \left( \sqrt{\frac{3}{-2} + 3} \right) \cdot (-2) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot (-2) = -\sqrt{6} \quad \text{P: } -\sqrt{6} \quad \text{Vyhovuje}$$

$$2) \quad x_2 = \sqrt{5} \quad \text{L: } \left( \sqrt{\frac{3}{1} + 3} \right) \cdot (-2) = \sqrt{6} \cdot (-2) = -\sqrt{24} \quad \text{P: } -\sqrt{6} \quad \text{Nevyhovuje}$$

**Řešením je  $x_1 = \frac{1}{5}$**

**Příklad 18:**

Řešte soustavu rovnic:

$$2^{\log x} + 2^{\log y} = 3$$

$$8^{\log x} + 8^{\log y} = 9$$

$$2^{\log x} = u \quad \dots \quad 2^{\log y} = v$$

Položíme  $8^{\log x} = (2^3)^{\log x} = (2^{\log x})^3 = u^3$

$$8^{\log y} = (2^3)^{\log y} = (2^{\log y})^3 = v^3$$

Po dosazení dostáváme:

$$u + v = 3$$

$$u^3 + v^3 = 9$$

$$u + v = 3 \quad |^3$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = 27 \Rightarrow u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 = 27 \Rightarrow$$

$$3u^2v + 3uv^2 = 18$$

$$3uv(u + v) = 18 \Rightarrow uv = \frac{18}{9} \Rightarrow u = \frac{2}{v}$$

$$u + v = 3$$

$$\frac{2}{v} + v = 3 \Rightarrow 2 + v^2 = 3v \Rightarrow v^2 - 3v + 2 = 0$$

$$v_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \Rightarrow v_1 = 2 \quad v_2 = 1$$

$$u_1 = \frac{2}{v_1} = 1 \quad u_2 = \frac{2}{v_2} = 2$$

$$2^{\log x} = u \quad 2^{\log y} = v$$

$$\text{pro } u_1 = 1 \text{ je } 2^{\log x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{pro } u_2 = 2 \text{ je } 2^{\log x} = 2 \Rightarrow x = 10$$

$$\text{pro } v_1 = 2 \text{ je } 2^{\log y} = 2 \Rightarrow y = 10$$

$$\text{pro } v_2 = 1 \text{ je } 2^{\log y} = 1 \Rightarrow y = 1$$

### Příklad 17:

Řešte soustavu rovnic:

$$\sqrt[3]{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6$$

$$\sqrt[3]{x^2 - y^2} = 8$$

Položíme – li

$$\sqrt[3]{x+y} = u \quad a \quad \sqrt[3]{x-y} = v \quad pak \quad \sqrt[3]{x^2 - y^2} = \sqrt[3]{(x-y) \cdot (x+y)} = uv$$

dostaneme

$$u + v = 6$$

$$u \cdot v = 8 \Rightarrow u = \frac{8}{v}, \quad pak \quad \frac{8}{v} + v = 6 \Rightarrow v^2 - 6v + 8 = 0 \Rightarrow v_1 = 4 \quad (u_1 = 2) \quad v_2 = 2 \quad (u_2 = 4)$$

**Řešení:**

$$v_1 = 4 \quad u_1 = 2$$

$$u^3 = x + y \Rightarrow x + y = 8$$

$$v^3 = x - y \Rightarrow x - y = 64$$

$$x = 36, \quad y = -28$$

$$v_2 = 2 \quad u_2 = 4$$

$$u^3 = x + y \Rightarrow x + y = 64$$

$$v^3 = x - y \Rightarrow x - y = 8$$

$$x = 36, \quad y = 28$$

### Příklad 16:

Řešte rovnici

$$(1 + \log x)^{\frac{2}{3}} + (1 - \log x)^{\frac{2}{3}} = 2 \cdot (1 - \log x)^{\frac{1}{3}}$$

Upravíme rovnici:

Zavedeme substituci  $y = \log x$ . Rovnice pak vypadá takto:

$$(1 + y)^{\frac{2}{3}} + (1 - y)^{\frac{2}{3}} = 2 \cdot (1 - y)^{\frac{1}{3}}$$

Dále zavedeme substituci  $u = (1 + y)^{\frac{1}{3}}$  a  $v = (1 - y)^{\frac{1}{3}}$ . Původní rovnici můžeme zapsat

jako:

$$u^2 + v^2 = 2v$$

Známe vztah mezi  $u$  a  $v$  z definice:

$$u^3 = 1 + \log x \Rightarrow \log x = u^3 - 1$$

$$v^3 = 1 - \log x \Rightarrow \log x = 1 - v^3$$

$$Tedy \quad u^3 - 1 = 1 - v^3 \Rightarrow u^3 + v^3 = 2.$$

Máme tak soustavu dvou rovnic:

$$1. \quad u^2 + v^2 = 2v$$

$$2. \quad u^3 + v^3 = 2$$

Z rovnice (2) vyjádříme  $u^3 = 2 - v^3$ .

Rozložíme rovnici (2) na  $(u + v)(u^2 - uv + v^2) = 2$ . Dosadíme  $u^2 + v^2 = 2v$  z rovnice (1):

$$(u + v)(2v - uv) = 2$$

$$(u + v)v(2 - u) = 2$$

Pro smysluplnost výrazů musí být  $1 - \log x \geq 0$ , což znamená  $\log x \leq 1$ , tedy  $x \leq 10$ .

Také  $x > 0$  kvůli definici logaritmu. Definiční obor je  $x \in (0, 10)$ . Všimněme si, že rovnice má triviální řešení, pokud  $1 - \log x = 0$ , tj.  $x = 10$ . Dosazením  $x = 10$  získáme

$(1 + 1)^{\frac{2}{3}} + (1 - 1)^{\frac{2}{3}} = 2 \cdot (1 - 1)^{\frac{1}{3}}$  což dává  $2^{\frac{2}{3}} + 0 = 0$ , což není pravda. Rovnice nemá řešení pro  $x = 10$ . Z toho vyplývá, že  $1 - \log x \neq 0$ .

Zkusíme najít další řešení soustavy. Rovnici  $u^2 + v^2 = 2v$  lze přepsat na  $u^2 + (v - 1)^2 = 1$ . Toto je kružnice v rovině  $uv$  se středem  $(0, 1)$  a poloměrem 1. Řešení  $u = 1, v = 1$  leží na této kružnici.

Rovnice  $u^3 + v^3 = 2$  je jiná křivka. Graficky se zdá, že se protínají pouze v bodě  $(1, 1)$  v reálných číslech, kde  $u, v$  musí být reálné, neboť výrazy pod třetí odmocninou musí být reálné. A protože  $\log x$  je reálné,  $u, v$  jsou také reálné.

Řešením rovnice je  $x = 1$ .

#### Příklad 15:

*V které logaritmické soustavě platí:*

$$\log_x 81 - \frac{1}{2} = \log_x 27$$

Čísla 27 a 81 jsou mocniny čísla 3, proto převedeme rovnici na logaritmy o základu 3:

$$\frac{\log_3 81}{\log_3 x} - \frac{1}{2} = \frac{\log_3 27}{\log_3 x}$$

$$\frac{4}{\log_3 x} - \frac{1}{2} = \frac{3}{\log_3 x} \Rightarrow \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_3 x = 2$$

$$x = 3^2 = 9$$

**Základ logaritmů je  $x = 9$**

**Příklad 14:**

$$\text{Řešte rovnici } \sqrt{\frac{32x}{x-1}} - 4\sqrt{\frac{x-1}{32x}} = 3.$$

Položíme

$$\frac{32x}{x-1} = z^2$$

$$z - 4\frac{1}{z} = 3 \Rightarrow z^2 - 4 = 3z \Rightarrow z^2 - 3z - 4 = 0 \Rightarrow z_1 = 4 \quad z_2 = -1$$

$$\text{pro } z_1 = 4 \quad \frac{32x}{x-1} = 16 \Rightarrow 32x = 16x - 16 \Rightarrow x = -1$$

$$\text{pro } z_2 = -1 \quad \frac{32x}{x-1} = 1 \Rightarrow 32x = x - 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{31} \quad \dots \text{ není řešením}$$

**Řešení x = -1****Příklad 13:**

*Řešte exponenciální rovnici včetně zkoušky řešení*

$$3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$$

$$3 \cdot 4^x - 6 \cdot 4^x \cdot 4 = -\frac{1}{3} \cdot 9^x \cdot 9^2 - \frac{1}{2} \cdot 9^x \cdot 9,$$

$$4^x (3 - 24) = 9^x \left( -\frac{81}{3} - \frac{9}{2} \right),$$

$$4^x \cdot 21 = 9^x \cdot \frac{63}{2},$$

$$2 \cdot 4^x = 3 \cdot 9^x,$$

$$2^{2x+1} = 3^{2x+1},$$

**Příklad 12:**

Řešte rovnice a proveďte zkoušku správnosti řešení

$$3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2.$$

Rovnici upravíme:

$$3(x^2 + 5x) + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2 \dots\dots x^2 + 5x = u$$

$$3u + 2\sqrt{u+1} = 2$$

$$2\sqrt{u+1} = 2 - 3u \quad |^2$$

$$4 \cdot (u+1) = 4 - 12u + 9u^2 \Rightarrow 9u^2 - 16u = 0 \Rightarrow u \cdot (9u - 16) = 0$$

$$u_1 = 0 \quad u_2 = \frac{16}{9}$$

pro  $u_1$  platí :  $x^2 + 5x = 0 \Rightarrow x = 0$  nebo  $x = -5$

pro  $u_2$  platí :  $x^2 + 5x = \frac{16}{9} \Rightarrow x = -\frac{16}{3}$  nebo  $x = \frac{1}{3}$

Zkouška řešení:

$x = 0$ :  $L = 2$

$$P = 0 + 0 + 2\sqrt{1} = 2$$

$x = 0$  je řešením naší rovnice

$x = -5$ :  $L = 2$

$$P = 3 \cdot 25 - 75 + 2\sqrt{25 - 25 + 1} = 2 \cdot 1 = 2$$

$x = -5$  je řešením naší rovnice

$x = -\frac{16}{3}$ :  $L = 2$

$$P = \text{nemá v } R \text{ řešení}$$

$x = -\frac{16}{3}$  není řešením naší rovnice

$x = \frac{1}{3}$ :  $L = 2$

$$P = 13,36$$

$x = \frac{1}{3}$  není řešením naší rovnice

Řešením rovnice je  $x = 0$  a  $x = -5$

**Příklad 11:**

Řešte v  $\mathbb{R}$  logaritmickou rovnici:

$$\frac{\log 8 - \log(x - 5)}{\log \sqrt{x + 7} - \log 2} = -1$$

Rovnici upravíme:

$$\frac{\log 8 - \log(x - 5)}{\log \sqrt{x + 7} - \log 2} = -1$$

$$\log 8 - \log(x - 5) = \log 2 - \frac{1}{2} \log(x + 7)$$

$$2 \cdot (\log 8 - \log 2) = 2 \log(x - 5) - \log(x + 7)$$

$$\log 16 = \log \frac{(x - 5)^2}{x + 7} \Rightarrow 16 = \frac{(x - 5)^2}{x + 7}$$

$$16x + 112 = x^2 - 10x + 25 \Rightarrow x^2 - 26x - 87 = 0 \Rightarrow x_1 = 29 \quad x_2 = -3$$

**Zkouška:**

$x = 29$ :

$$P: \frac{\log 8 - \log 24}{\log 6 - \log 2} = \frac{\log \frac{1}{3}}{\log 3} = \frac{-\log 3}{\log 3} = -1$$

$L: -1$

$x = -3$ :.... *nevyhovuje*

**Řešením rovnice je  $x = 29$**

**Příklad 10:**

Jestliže  $\log_2 y = 2 - \frac{1}{2} \log_2(2x + 1) - \log_2(x + 3)$ , pak číslo  $y$  je rovno

a)  $\frac{4}{(x + 3)\sqrt{2x + 1}}$       b)  $\frac{\sqrt{2x + 1}}{x + 3}$       c)  $\frac{(x + 3)\sqrt{2x + 1}}{2}$

d)  $-2x - \frac{3}{2}$       e)  $\frac{1}{(x + 3)\sqrt{2x + 1}}$

Upravíme pravou stranu rovnice podle vět o logaritmování:

$$2 = \log_2 4$$

$$\log_2 y = \log_2 4 - \log_2 \sqrt{2x + 1} - \log_2(x + 3)$$

$$\log_2 y = \log_2 \frac{4}{\sqrt{2x + 1} \cdot (x + 3)} \Rightarrow y = \frac{4}{\sqrt{2x + 1} \cdot (x + 3)}$$

**Správná odpověď' a)**

**Příklad 9:***Řešte soustavu rovnic včetně zkoušky řešení*

$$x \cdot y = 500$$

$$x^{\log y} = 25$$

Pravou stranu první rovnice lze psát ve tvaru  $5 \cdot 10^2$ , pravou stranu druhé rovnice ve tvaru  $5^2$ .*Řešení.* Logaritmuje obě strany v obou rovnicích:

$$\log x + \log y = \log 5 + 2,$$

$$\log y \cdot \log x = 2 \log 5.$$

Dosadíme

$$\log x = u,$$

$$\log y = v.$$

Dostáváme soustavu:

$$u + v = \log 5 + 2,$$

$$uv = 2 \log 5.$$

Uvedená soustava má řešení:

I.  $u_1 = \log 5,$

$v_1 = 2;$

II.  $u_2 = 2,$

$v_2 = \log 5.$

Platí tedy

I.  $\log x_1 = \log 5,$

$x_1 = 5;$

$\log y_1 = 2,$

$y_1 = 100;$

II.  $\log x_2 = 2,$

$x_2 = 100;$

$\log y_2 = \log 5,$

$y_2 = 5.$

*Zkouška:* I. Ověříme nejprve první dvojici kořenů  $x_1 = 5$ ,  $y_1 = 100$ . Platí

$$L_1 = 5 \cdot 100 = 500, P_1 = 500, L_1 = P_1;$$

$$L_2 = 5^{\log 100} = 5^2 = 25, P_2 = 25, L_2 = P_2.$$

II. Nyní ověříme dvojici  $x_2 = 100$ ,  $y_2 = 5$ . Platí

$$L'_1 = 100 \cdot 5 = 500, P'_1 = 500, L'_1 = P'_1;$$

$$L'_2 = 100^{\log 5} = 10^{2 \log 5} = 10^{\log 25} = 25, P'_2 = 25,$$

$$L'_2 = P'_2.$$

**Řešením jsou hodnoty:  $x = 5$ ,  $y = 100$  nebo  $x = 100$ ,  $y = 5$**

**Příklad 8:**

Určete hodnotu podílu výrazu  $\frac{V_1}{V_2}$ :

$$V_1 = 3 \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{4} - 2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{8}$$

$$V_2 = \log_{\frac{1}{8}} 216 + \log_2 32 - 2 \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{\frac{1}{81}}$$

$$V_1 = 3 \cdot \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{4} - 2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{8} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{64}{9} = \log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$$

$$V_2 = \log_{\frac{1}{8}} 216 + \log_2 32 - 2 \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{\frac{1}{81}} = -3 + 5 - \frac{2}{3} \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 2 - \frac{2}{3} \cdot 4 = -\frac{2}{3}$$

**Výsledek je  $\frac{3}{2}$**

**Příklad 7:**

Vlak by získal na cestě dlouhé 180 km náskok  $\frac{2}{3}$  hodiny, kdyby za hodinu urazil vždy o 9 km více. Kolik hodin potřebuje k projetí celé trati?

*Řešení.* Vlak potřebuje k projetí celé trati  $x$  hodin, jeho původní rychlost je  $\frac{180}{x}$  km; při rychlosti  $\left(\frac{180}{x} + 9\right)$  získá  $\frac{2}{3}$  hodiny.

Z fyziky známe vzorec

$$\frac{s}{c} = t,$$

kde  $s$  je dráha,  $c$  rychlost a  $t$  doba. Sestavíme tedy rovnici

$$\frac{180}{\frac{180}{x} + 9} = x - \frac{2}{3}.$$

Rovnici řešíme:

$$3x^2 - 2x - 40 = 0,$$

$$x_1 = 4,$$

$$x_2 = -\frac{20}{6}$$

(záporný kořen nevyhovuje slovní úloze).

**Vlak projede trať za 4 hodiny**

**Příklad 6:**

Ve které číselné soustavě platí  $26 \cdot 35 = 888$ ?

*Řešení.* Hledaný základ číselné soustavy označme  $x$ . Zápisy 26, 35, 888 znamenají v číselné soustavě o základu  $x$  tato čísla:

$$26 = 2x + 6,$$

$$35 = 3x + 5,$$

$$888 = 8x^2 + 8x + 8.$$

Máme tedy řešit rovnici

$$(2x + 6)(3x + 5) = 8x^2 + 8x + 8.$$

Řešme tedy tuto rovnici:

$$x^2 - 10x - 11 = 0;$$

$$x_{1,2} = 5 \pm 6 = \begin{cases} 11, \\ -1 \text{ (nevyhovuje).} \end{cases}$$

Součin byl počítán v soustavě o základu 11.

**Příklad 5:**

*Řešte rovnici*

$$\frac{4x+4}{5x-5} = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$$

*Řešení.* Rovnici upravme na tvar

$$\frac{4(x+1)}{5(x-1)} - \frac{(x+1)^2}{x^2+1} = 0.$$

Dělit obě strany rovnice výrazem  $x+1$  nesmíme, poněvadž tento výraz obsahuje hledanou neznámou. Upravujme tedy takto:

$$(x+1) \left[ \frac{4}{5(x-1)} - \frac{x+1}{x^2+1} \right] = 0.$$

$$\text{I. } x+1 = 0;$$

$$x_1 = -1.$$

$$\text{II. } \frac{4}{5x-5} - \frac{x+1}{x^2+1} = 0,$$

$$x^2 = 9; \quad x_{2,3} = \pm 3.$$

Kořeny rovnice jsou  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 3$ ,  $x_3 = -3$ .

**Příklad 4:***Vyřešte nerovnici:*

$$(x^2 - x - 20)(x^2 + x - 2) \geq 0$$

$$x^2 - x - 20 = x^2 + 4x - 5x - 20 = x \cdot (x + 4) - 5 \cdot (x + 4) = (x + 4) \cdot (x - 5)$$

$$x^2 + x - 2 = x^2 + 2x - x - 2 = x \cdot (x + 2) - (x + 2) = (x + 2) \cdot (x - 1)$$

**Nulové body: -4, 5, -2, 1**

	$(-\infty; -4)$	$\langle -4; -2 \rangle$	$\langle -2; 1 \rangle$	$\langle 1; 5 \rangle$	$\langle 5; \infty \rangle$
<b>x + 4</b>	-	+	+	+	+
<b>x - 5</b>	-	-	-	-	+
<b>x + 2</b>	-	-	+	+	+
<b>x - 1</b>	-	-	-	+	+
<b>výsledek</b>	+	-	+	-	+

$$x \in (-\infty; -4) \cup \langle -2; 1 \rangle \cup \langle 5; \infty \rangle$$

**Příklad 3:***Užitím Vietových vzorů řešte rovnici*

$$x \cdot (x + 2) = 3x + 132$$

Rovnici upravíme:

$$x^2 + 2x = 3x + 132$$

$$x^2 - x - 132 = 0 \quad \text{kořeny } x_1, x_2$$

*Platí :*

$$x_1 \cdot x_2 = -132$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$-132 = x_1 \cdot x_2 = 12 \cdot (-11)$$

$$x_1 = 12 \quad x_2 = -11$$

$$x_1 + x_2 = 12 - 11 = 1$$

**Rovnice má řešení  $x_1 = 12$   $x_2 = -11$**

**Příklad 2:**

Je dána kvadratická rovnice  $x^2 + px - 48 = 0$ . Vypočítejte koeficient  $p$  a kořeny  $x_1, x_2$ , jestliže pro ně platí  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{7}{12}$

**Podle Vietových vzorců platí:**

$$x_1 \cdot x_2 = -48$$

$$x_1 + x_2 = -p$$

dále víme, že musí platit:  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{7}{12}$

po úpravě dostáváme

$$12(x_1 + x_2) = -7x_1 \cdot x_2$$

$$12 \cdot (-p) = (-7) \cdot (-48)$$

$$p = -\frac{7 \cdot 48}{12} = -28$$

Kvadratická rovnice vyhovující zadání má tvar :

$$x^2 + 28x - 48 = 0$$

Kořeny rovnice jsou vypočítány pomocí kvadratické formule

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Je dosazeno  $a = 1$ ,  $b = 28$  a  $c = -48$  do kvadratické formule.

$$\text{Kořeny jsou vypočítány jako } x_{1,2} = \frac{-28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48)}}{2 \cdot 1}$$

Je vypočítán diskriminant  $D = 28^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48) = 784 + 192 = 976$ .

$$\text{Kořeny jsou vypočítány jako } x_{1,2} = \frac{-28 \pm \sqrt{976}}{2}$$

Je zjednodušena odmocnina  $\sqrt{976} = \sqrt{16 \cdot 61} = 4\sqrt{61}$ .

$$\text{Kořeny jsou vypočítány jako } x_{1,2} = \frac{-28 \pm 4\sqrt{61}}{2} = -14 \pm 2\sqrt{61}$$

Kořeny jsou  $x_1 = -14 + 2\sqrt{61}$  a  $x_2 = -14 - 2\sqrt{61}$ .

Koeficient  $p$  je roven 28. Kořeny rovnice jsou  $x_1 = -14 + 2\sqrt{61}$  a  $x_2 = -14 - 2\sqrt{61}$ .

**Příklad 1:***Zjednodušte zlomek*

$$V = \frac{\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x - 4} - \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - x - 6}}{\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 12} - \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + x - 2}}$$

Krácením zjednodušíme zlomek:

$$V = \frac{\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x - 4} - \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - x - 6}}{\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 12} - \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + x - 2}}$$

*Řešení.* Nejprve provedme pomocné výpočty:

$$x^2 + x - 2 = 0; \quad x^2 + x - 12 = 0; \quad x^2 + 3x - 4 = 0;$$

$$x_{1,2} = 1, -2; \quad x_{1,2} = 3, -4; \quad x_{1,2} = 1, -4;$$

$$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2);$$

$$x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4);$$

$$x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4);$$

$$x^2 - x - 6 = 0;$$

$$x_{1,2} = 3, -2;$$

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2).$$

Přistupme nyní k vlastní úpravě:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+4)} - \frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)(x+2)}}{\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+4)} - \frac{(x+4)(x-1)}{(x+2)(x-1)}} = \\ &= \frac{\frac{x+2}{x+4} - \frac{x+4}{x+2}}{\frac{x+2}{x+4} - \frac{x+4}{x+2}} = 1. \end{aligned}$$

*Diskuse.* Zlomek  $V$  nemá smysl pro  $x = 1, -2, 3, -4$ . Musí však platit také

$$\frac{x+2}{x+4} - \frac{x+4}{x+2} \neq 0,$$

což vede k závěru  $x \neq -3$ .